

### 3. Кристаллографическое проектирование

#### 3.1. Закон постоянства гранных углов (закон Стенона)

Реальные кристаллы отличаются от идеальных многогранников (учебных моделей) неравномерным развитием симметричных граней вследствие различных скоростей роста этих граней. Поэтому симметрия внешней формы реальных кристаллов всегда более или менее искажена, и иногда очень сильно. Определить на реальных кристаллах элементы симметрии, присущие форме кристаллов данного вещества (минерала), задача достаточно сложная. Конечно, структура кристалла при этом своей симметрии не теряет. Вопрос в том, в каких элементах искаженной внешней формы кристалла проявляется его истинная симметрия? Такими элементами являются углы между гранями кристалла. Действительно, грани кристалла обязательно параллельны определенным плоским сеткам решетки, или структурным плоскостям. Углы между плоскими сетками, естественно, не меняются при неравномерном разрастании граней кристалла. Значит, не меняются и углы между соответствующими гранями. Это положение составляет суть одного из фундаментальных законов кристаллографии – закона постоянства гранных углов. Закон постоянства углов был опытным путем установлен датским ученым Николасом Стеноном (Нильсом Стенсеном) в 1669 году, и в честь него назван законом Стенона. Этот закон звучит так: *кристаллы разной формы одного вещества имеют неизменные углы между соответственными гранями*. Более конкретно, изменение относительных размеров и формы граней, их расстояний от центра кристалла, т.е. линейных параметров кристалла, оставляет неизменными его угловые параметры – это наиболее устойчивые характеристики формы кристалла, а значит, и его симметрии.

Отсюда следует, что нам нужен метод описания (изображения) кристалла, отвлекающийся от его линейных параметров и фиксирующий только угловые параметры кристалла. Таким методом является **кристаллографическое проектирование**.

#### 3.2. Сферическая проекция и сферические координаты

Исходной для кристаллографического проектирования является сферическая проекция, т.е. проекция элементов кристалла на сферу. Она строится следующим образом. Описываем вокруг кристалла сферу с центром, лежащим в центре тяжести кристалла (*сфера проекций*, рис.3.1а). Все элементы кристалла – грани, ребра, плоскости симметрии и оси симметрии представляем проходящими через центр сферы, т.е. пересекающимися в одной точке. Мысленно продолжаем все эти элементы до их пересечения со сферой проекций.

Сферической проекцией любого направления в кристалле будет точка пересечения этого направления со сферой проекций (рис.3.2а). Чтобы задать положение этой точки на сфере, вводят *сферические координаты* (рис.3.1а):  $\rho$  – угловое расстояние точки от северного полюса сферы,  $0^\circ \leq \rho \leq 180^\circ$ , и  $\phi$  – угловое расстояние меридиана, проходящего через точку, от нулевого (начального) меридиана, который выбирается произвольно,  $0^\circ \leq \phi \leq 360^\circ$ . Если провести аналогию с географическими координатами, то  $\phi$  отвечает долготе, а  $\rho$  – полярному расстоянию ( $90^\circ \pm$ широта). Сферические проекции горизонтальных направлений лежат на экваторе,  $\rho=90^\circ$ . Чем круче направление, тем ближе его проекция к полюсу. Проекция вертикального направления – сам полюс (северный для верхнего конца направления, южный – для нижнего; соответственно  $\rho=0^\circ$  и  $\rho=180^\circ$ ).

Сферической проекцией любой плоскости в кристалле является линия пересечения этой плоскости со сферой проекций (рис.3.2б). Поскольку все плоскости мы представляем проходящими через центр сферы проекций, эта линия будет большим кругом, центр которого совпадает с центром сферы. Проекцией горизонтальной плоскости будет экватор, проекциями вертикальных плоскостей –

меридианы. Таким образом, мы можем получить сферические проекции всех граней кристалла и плоскостей симметрии в виде больших кругов на сфере, а проекции всех осей симметрии – в виде точек на этой сфере. Точки пересечения больших кругов, отвечающих граням кристалла, будут проекциями реальных или возможных ребер кристалла.

Сферическая проекция – объемная фигура, и пользоваться ею на практике неудобно. Для наглядности и удобства сферическую проекцию следует спроектировать на плоскость. При этом используют не привычные ортогональную или аксонометрическую проекции, а специальную стереографическую проекцию.

### 3.3. Стереографическая проекция. Проектирование элементов симметрии

В качестве плоскости стереографической проекции берется экваториальная плоскость сферической проекции – *круг проекций*. Точки сферической проекции соединяются прямыми линиями с одним из полюсов (точки верхней полусфера – с южным полюсом, точки нижней полусфера – с северным полюсом). Пересечения этих точек с кругом проекций и образуют *стереографическую проекцию* (рис.3.2). Например, чтобы спроектировать направление АOB, соединяем точку сферической проекции верхнего конца этого направления А с южным полюсом S, точку В нижнего конца – с северным полюсом N. Линия SA пересекает круг проекций в точке A', линия BN – в точке B'. Это и будет стереографическая проекция направления АOB – его верхней и нижней части соответственно (рис.3.2а). Понятно, что чем круче направление, тем ближе к центру круга проекций стереографическая проекция этого направления. Вертикальное направление NOS проектируется в центр круга проекций, горизонтальные направления – на его окружность. При таком способе проектирования значение сферической координаты точки φ не искажается, φ отсчитывается вдоль окружности круга проекций от начальной точки ( $\phi=0$ ) по часовой стрелке. Координата ρ отсчитывается от центра круга проекций к его окружности, но шкала неравномерная в силу искажений при проектировании сферы на плоскость, и  $OA'=\tan \rho/2$  (рис.3.1б).

Чтобы получить стереографическую проекцию плоскости, соединим все точки сферической проекции этой плоскости (например, ACBD, рис. 3.2б) с соответствующими полюсами. Пересечения этих линий с кругом проекций образует две симметричные дуги большого круга AC'B и AD'B, опирающиеся на диаметр круга проекций и отображающие «северную» и «южную» половины плоскости. Чем круче наклонена плоскость к горизонтали, тем ближе дуга, отображающая плоскость, к центру круга проекций, и тем меньше кривизна дуги. Горизонтальная плоскость проектируется окружностью круга проекций, вертикальные плоскости – его диаметрами (рис.3.3).

Стереографические проекции используются для изображения элементов симметрии кристалла. Проекции осей симметрии обозначаются условными знаками, показанными в таблице 3.1 Для горизонтальных осей симметрии (параллельных плоскости проекции) соединяем проекции двух концов каждой оси вспомогательными линиями. Для вертикальных и наклонных осей симметрии проектируют только верхние («северные») их концы, вспомогательные линии не проводят. Проекции плоскостей симметрии обозначают двойными линиями. Проектируют только верхние («северные») части плоскостей. Центр инверсии обозначают буквой С около центра круга проекций.

При проектировании кристалла необходимо его определенным образом ориентировать относительно плоскости проекций и относительно наблюдателя (*установка кристалла*). Правила установки, конечно, должны быть единообразными. Ниже приводятся эти правила. Обоснование их мы дадим позже, в разделе 5.2, где будут введены кристаллографические системы координат. В таблице 2.1 предыдущего раздела показаны проекции элементов симметрии для всех видов симметрии, и на этих проекциях можно также видеть установку кристаллов.

Начнем с кристаллов *кубической сингонии*. Одна из трех взаимно перпендикулярных осей симметрии ( $3L_2$ ,  $3L_{i4}$ ,  $3L_4$ ) устанавливается перпендикулярно плоскости проекции, вторая направляется слева направо, третья – на наблюдателя.

Кристаллы *средних сингоний* устанавливаются осью высшего порядка перпендикулярно плоскости проекции. Ось  $L_2$  или перпендикуляр к плоскости симметрии (ось  $L_{i2}$ ) направляется на наблюдателя. При отсутствии осей второго порядка и плоскостей симметрии на наблюдателя направляется какое-либо хорошо развитое ребро кристалла – здесь, конечно, есть некоторый произвол в установке.

Кристаллы *ромбической сингонии* устанавливаются так, чтобы одно из трех взаимно перпендикулярных единичных направлений было перпендикулярно плоскости проекций, причем это должна быть обязательно поворотная ось симметрии второго порядка. Если имеются три оси  $L_2$ , то вертикально устанавливают ту ось, которой параллельно максимальное число ребер кристалла. Оставшиеся два единичных направления (оси  $L_2$  или  $L_{i2}$ ) направляют одно слева направо, другое на наблюдателя.

Кристаллы *моноclinной сингонии* ориентируют так, чтобы ось  $L_2$  или  $L_{i2}$  (перпендикуляр к плоскости симметрии) были направлены слева направо (каким концом – не имеет значения). При соблюдении этого условия кристалл поворачивают вокруг  $L_2$  или  $L_{i2}$  так, чтобы максимальное число ребер были перпендикулярны плоскости проекции.

Кристаллы *триклиинной сингонии* ориентируют по трем наиболее развитым ребрам, углы между которыми по возможности близки к  $90^\circ$ . Вертикально устанавливают ребро, которому параллельно максимальное число граней (других ребер). Второе из трех выбранных ребер направляют примерно слева направо. Третье ребро при этом оказывается, естественно, направленным косо к наблюдателю. Для триклиинных кристаллов произвол в установке наибольший.

### 3.4. Гномостереографическая проекция. Проектирование граней кристалла.

Плоскости, отвечающие граням кристалла, можно проектировать стереографически, как плоскости симметрии. Однако граней на кристалле обычно много, и проекция будет так загромождена линиями, что разобраться в ней будет трудно. Поэтому стереографически проектируют не сами грани, а перпендикуляры к ним (т.н. «полюса» граней). Поскольку перпендикуляр по-гречески – гномон, то стереографическая проекция перпендикуляра к грани называется *гномостереографической проекцией* грани. На рис. 3.4а показана схема получения гномостереографических проекций граней кристалла. Совмещаем центр тяжести кристалла с центром сферы проекций. Проводим из центра сферы перпендикуляры к каждой грани (*a*, *b*) или к продолжению грани, если перпендикуляр ее не пересекает (*c*, *g*). Точки пересечения этих перпендикуляров со сферой проекций соединяем прямыми линиями с полюсами (южным – для верхних граней, северным – для нижних граней). Точки, в которых эти линии пересекают экваториальную плоскость (круг проекций), и будут гномостереографическими проекциями граней. Проекции верхних и нижних граней кристалла будем обозначать разными знаками – например, проекции верхних граней – кружками, нижних – крестиками. Если верхняя и нижняя грани располагаются точно друг под другом, их проекции попадают в одну точку и обозначаются крестиком в кружке.

Из приведенной на рис.3.4а схемы видно что чем круче грань, тем ближе ее гномостереографическая проекция к окружности круга проекций. И наоборот, чем положе грань, тем ближе ее проекция к центру круга проекций. Горизонтальные грани проектируются в центр круга проекций, вертикальные – на его окружность (их удобнее обозначать крестиками, чтобы случайно не перепутать с проекциями осей второго порядка, которые обозначаются эллипсами). На рис. 3.4в в качестве примера приведена гномостереографическая проекция граней кристалла, изображенного на рис.3.4б.

### 3.5. Приемы, облегчающие приближенное проектирование граней кристалла.

При проектировании граней следует использовать их положение относительно элементов симметрии кристалла (рис.3.5). Если проектируемая грань перпендикулярна какой-либо оси симметрии, то ее проекция совпадает с проекцией выхода этой оси (например, грани 1, 2, 4). Если грань перпендикулярна плоскости симметрии, ее проекция расположена на двойной линии, являющейся стереографической проекцией этой плоскости (например, грани 2<sub>1</sub>, 3<sub>1</sub>, 4<sub>2</sub>). Если грань расположена под равными углами к каким-либо осям или плоскостям симметрии, то и проекция грани должна лежать симметрично относительно проекций этих осей или плоскостей (например, грани 2, 2<sub>1</sub>, симметричные относительно двух осей L<sub>2</sub> или относительно двух плоскостей симметрии; грани 2<sub>1</sub>, 3<sub>1</sub>, симметричные относительно двух осей L<sub>3</sub>).

Если какие-либо грани кристалла связаны его элементами симметрии, то эта связь должна проявляться и на проекции. Поэтому нет необходимости проектировать все грани кристалла путем описанных выше построений. Достаточно спроектировать по одной грани из каждого комплекса равных граней, связанных элементами симметрии. Далее спроектированная грань размножается элементами симметрии непосредственно на проекции. Рассмотрим для примера кристалл, изображенный на рис. 3.4б. По правилам проектирования получим проекцию грани 1, обозначенную кружком 1<sub>1</sub> в круге проекций на рис. 3.3в. Далее отражаем эту точку в вертикальных плоскостях симметрии m<sub>1</sub> и m<sub>2</sub> и получаем точки 1<sub>2</sub> и 1<sub>3</sub>. Поворачивая исходную точку 1<sub>1</sub> вокруг вертикальной оси L<sub>2</sub>, получим симметричную точку 1<sub>4</sub>. Отражая точки 1<sub>1</sub>, 1<sub>2</sub>, 1<sub>3</sub>, 1<sub>4</sub> в горизонтальной плоскости симметрии m<sub>3</sub>, получим симметричные им нижние точки – крестики в кружках. Таким образом, получили проекции всех восьми граней типа 1, связанных элементами симметрии кристалла. Так же поступаем и с другими комплексами взаимно симметричных граней.

В кристаллах кубической сингонии имеются четыре оси L<sub>3</sub>, косо расположенные относительно плоскости проекции (при стандартной установке кристалла). Для удобства проектирования граней и, особенно, для удобства их размножения на проекции полезно провести вспомогательные линии в круге проекций через выходы осей L<sub>3</sub> и концы трех взаимно перпендикулярных осей симметрии (3L<sub>2</sub>, 3L<sub>4</sub> или 3L<sub>1</sub>) – рис. 3.6. Эти линии делят каждый из четырех квадрантов круга проекций на шесть искаженных сферических треугольников, симметрично повторяющихся (через один) вокруг L<sub>3</sub>, выходящей в центре квадранта. Соответственно, симметричными являются вершины и стороны этих треугольников – точки A, O, B; точки M, N, C; дуги AC, MO, NB; дуги CB, NO, MA; дуги KA, KO, KB; дуги KC, KN, KM. На сферической проекции все эти дуги, как и сферические треугольники, равны, а на стереографической проекции искажаются. Для разных видов симметрии кубической сингонии некоторые или все вспомогательные линии могут совпадать с проекциями плоскостей симметрии или осей симметрии (см. табл.2.1). С использованием вспомогательных линий проектирование граней и размножение их на проекции выполняются гораздо легче и точнее.

Еще одним приемом, облегчающим проектирование граней кристаллов, является использование понятия о кристаллографических зонах (поясах). Зоной называется совокупность граней, пересекающихся в параллельных ребрах (и значит, параллельных одному направлению – оси зоны). Такие совокупности граней легко увидеть на кристаллах. Так, на кристалле, изображенном на рис.3.5а, можно выделить зоны, сложенные гранями 3<sub>2</sub>-2<sub>2</sub>-4-2<sub>1</sub>-3<sub>1</sub>-4<sub>2</sub>; 4<sub>1</sub>-2-3-4-3<sub>4</sub>-2<sub>4</sub>; 2<sub>2</sub>-1-4-1<sub>3</sub>; 2<sub>3</sub>-1<sub>1</sub>-4-1<sub>2</sub> и т.п. Границы, принадлежащие к одной зоне, проектируются на одну дугу большого круга – проекцию зоны (стереографическую проекцию плоскости, перпендикулярной этим граням) – рис.3.5б. Грань, принадлежащая одновременно двум зонам (например, грань 2<sub>1</sub> на рис.3.5а, принадлежащая зонам 4<sub>1</sub>-1-2<sub>1</sub>-1<sub>2</sub> и 4<sub>2</sub>-3<sub>1</sub>-2<sub>1</sub>-4-2<sub>4</sub>-3<sub>4</sub>), на проекции лежит на пересечении дуг большого круга, являющихся проекциями соответствующих зон (рис.3.5б).

Конечно, проектирование граней «на глаз» не может быть очень точным, но надо стараться соблюдать относительные наклоны граней как к плоскости проекций, так и к имеющимся элементам симметрии. Точное проектирование граней кристалла может быть выполнено, если известны сферические координаты их полюсов (нормалей к граням)  $\phi$  и  $\rho$ . Определяют сферические координаты на специальном приборе – гониометре. Схема прибора и принцип измерения сферических координат излагаются в учебниках по кристаллографии и в соответствующих руководствах. Построение проекции кристалла (всех его граней) по результатам гониометрических измерений производят либо вручную, на специальных сетках (сетка Вульфа, сетка Болдырева), либо с помощью компьютерных программ.

#### Подписи к рисунками таблице раздела 3

Рис.3.1. Сфера проекций и координаты  $\phi$  и  $\rho$  точки А на сфере (а) и в круге проекций (б).

Рис.3.2. Сферическая и стереографическая проекции направления (а) и плоскости (б).

Рис.3.3. Стереографические проекции плоскостей: вертикальной (а), горизонтальной (б), и наклонных разной крутизны (в).

Рис.3.4. Схема получения гномостереографических проекций граней (а), проектируемый кристалл (б), и его стереограмма (в).

Рис.3.5. Положение гномостереографических проекций граней кристалла относительно его элементов симметрии: а)проектируемый кристалл, б)стереограмма.

Рис.3.6. Основа для проектирования многогранника кубической сингонии.

Табл.3.1. Условные обозначения элементов симметрии на стереографических проекциях.