Saint-Petersburg State University

КРИСТАЛЛОГРАФИЯ

тема лекции:
Виды симметрии, категории и сингонии, международные обозначения

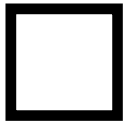
Гуржий В.В.

2021

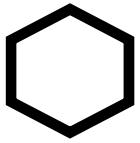
Элементы симметрии

L_2

L_3



L_4

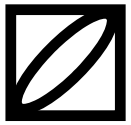


L_6

$L_{i1} \equiv C$

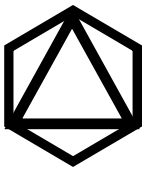
$L_{i2} \equiv m\ (P)$

$L_{i3} \equiv L_3 + C$



L_{i4}

(содержит L_2)



$L_{i6} \equiv L_3 + m$

St.Petersburg State University

Взаимодействие элементов симметрии

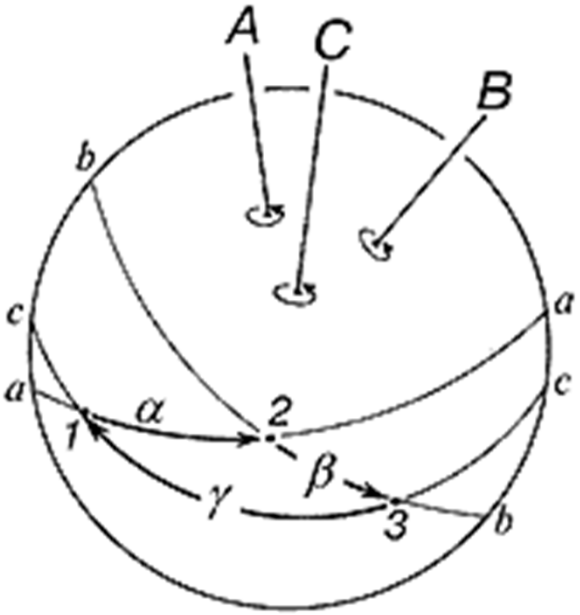
В кристалле может быть несколько разных элементов симметрии, но их комбинация не может быть произвольной.

Элементы симметрии связаны друг с другом, и эта связность описывается теоремами «о сложении элементов симметрии».

Взаимодействие элементов симметрии

1. Теорема Эйлера (осевая)

При наличии двух пересекающихся осей симметрии присутствует третья ось, равнодействующая им и проходящая через точку их пересечения



Леонард Эйлер
1707-1783

St.Petersburg
State University

Взаимодействие элементов симметрии

1. Теорема Эйлера (осевая)

При наличии двух пересекающихся осей симметрии присутствует третья ось, равнодействующая им и проходящая через точку их пересечения

Все элементы симметрии кристаллических многогранников являются осями симметрии – простыми или инверсионными (*C* и *m* сводятся к L_{i1} и L_{i2}). Поэтому все теоремы о сложении элементов симметрии многогранников являются частными случаями теоремы Эйлера.

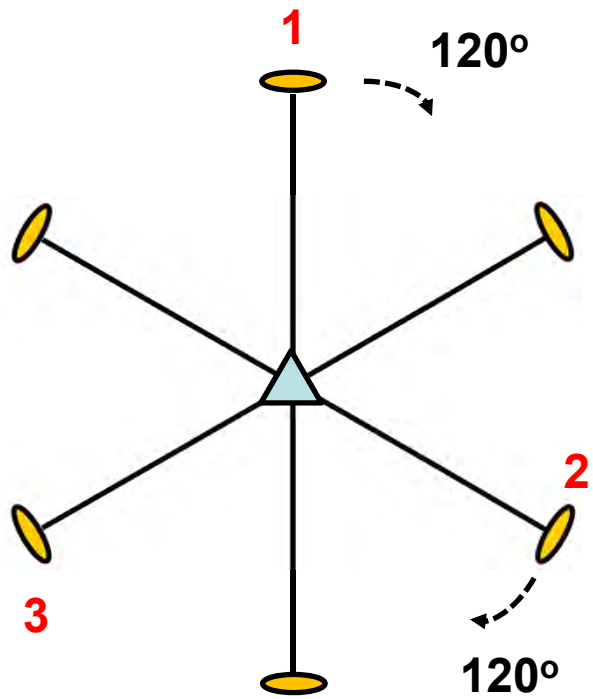
Взаимодействие элементов симметрии

1. Теорема Эйлера (осевая)

Следствие: Если есть ось *n* - порядка и перпендикулярная ей ось 2 порядка, то осей 2 порядка будет *n*.

$$L_n + \perp L_2 = L_n\, nL_2$$

$$L_3 + \perp L_2 = L_3\, 3L_2$$



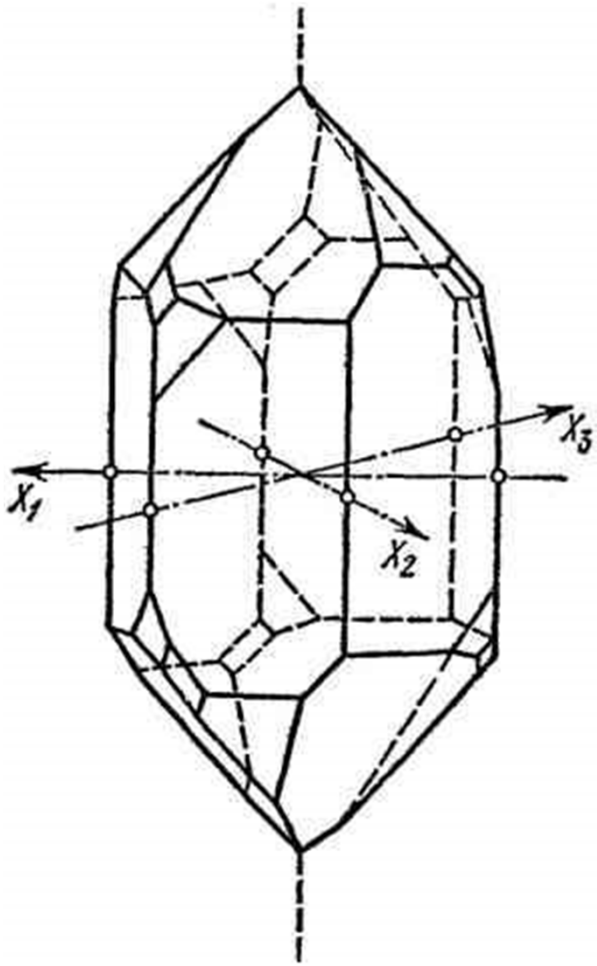
Взаимодействие элементов симметрии

1. Теорема Эйлера (осевая)

Следствие: Если есть ось *n* - порядка и перпендикулярная ей ось 2 порядка, то осей 2 порядка будет *n*.

$$L_n + \perp L_2 = L_n\, nL_2$$

$$L_3 + \perp L_2 = L_3\, 3L_2$$

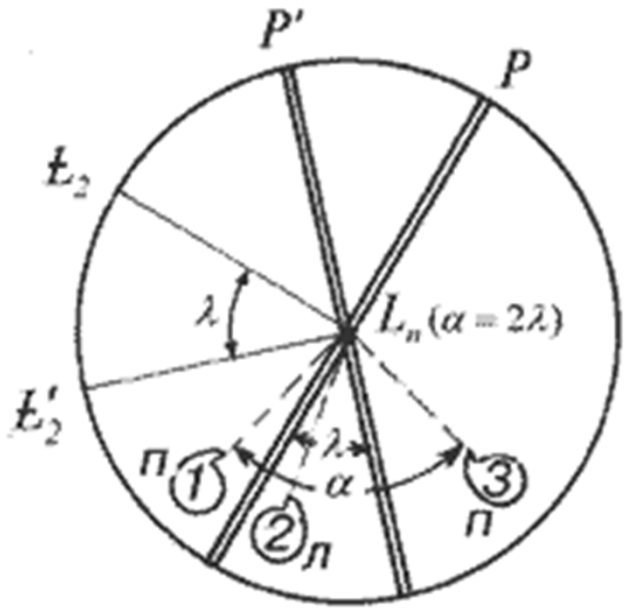


Модель кристалла кварца

Взаимодействие элементов симметрии

2. Теорема о плоскостях

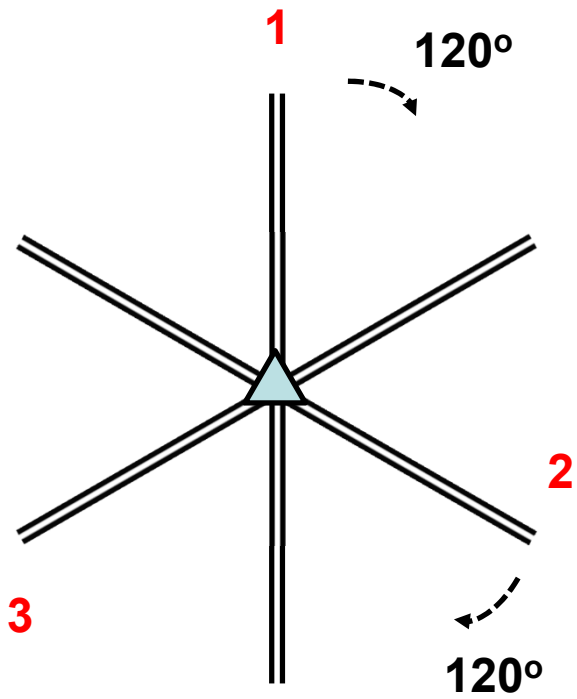
Линия пересечения двух плоскостей симметрии есть простая ось симметрии, равнодействующая им, с элементарным углом поворота – вдвое большим.



Взаимодействие элементов симметрии

2. Теорема о плоскостях

Следствие: Если есть параллельные ось и плоскость, то через ось будет проходить столько плоскостей, каков ее порядок.



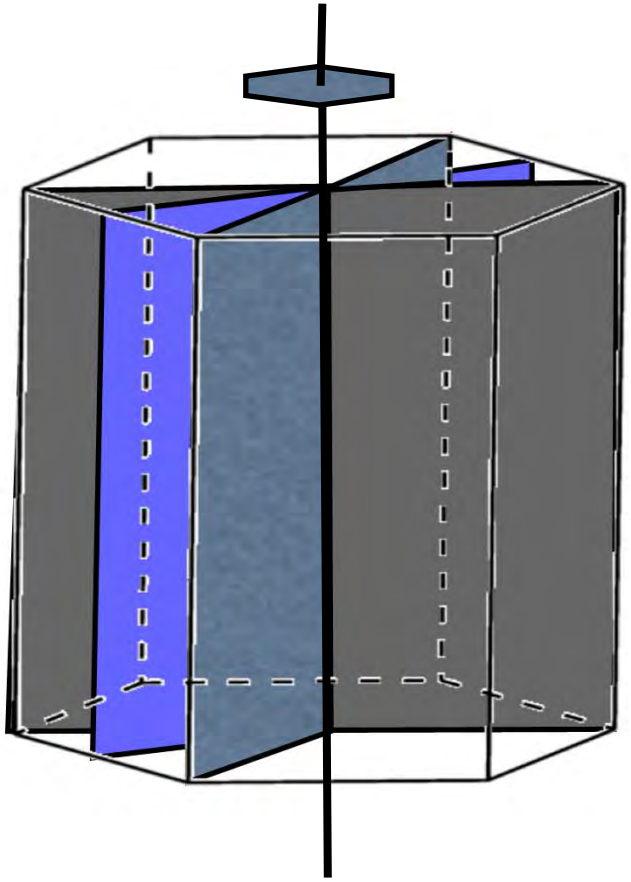
$$L_n + // m = L_n\, n m$$

$$L_3 + // m = L_3\, 3 m$$

Взаимодействие элементов симметрии

2. Теорема о плоскостях

Следствие: Если есть параллельные ось и плоскость, то через ось будет проходить столько плоскостей, каков ее порядок.



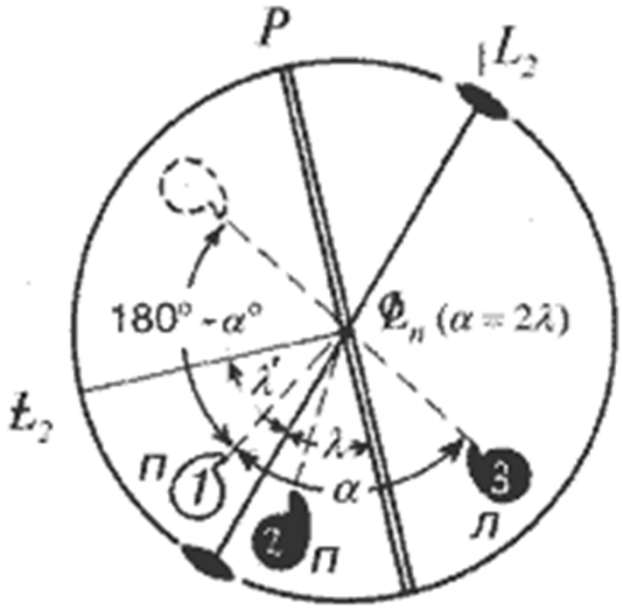
$$L_n + // m = L_n\, n m$$

$$L_6 + // m = L_6\, 6 m$$

Взаимодействие элементов симметрии

3. Теорема об инверсионных осях

Через точку пересечения оси второго порядка и плоскости симметрии (пересекающихся под углом λ) будет проходить инверсионная ось симметрии, равнодействующая им, с элементарным углом поворота $\boldsymbol{\alpha}$ = 180 - 2λ.



Взаимодействие элементов симметрии

3. Теорема об инверсионных осях

Следствие: Если есть инверсионная ось симметрии n-порядка и параллельная ей плоскость, то будет присутствовать перпендикулярная ось второго порядка, причем число L_2 и *m* будет равно порядку простой оси, содержащейся в инверсионной.

$$L_{i3} + // m = 3// m + 3\perp L_2$$

$$L_{i6} + // m = 3// m + 3\perp L_2$$

$$L_{i4} + // m = 2// m + 2\perp L_2$$

St.Petersburg State University

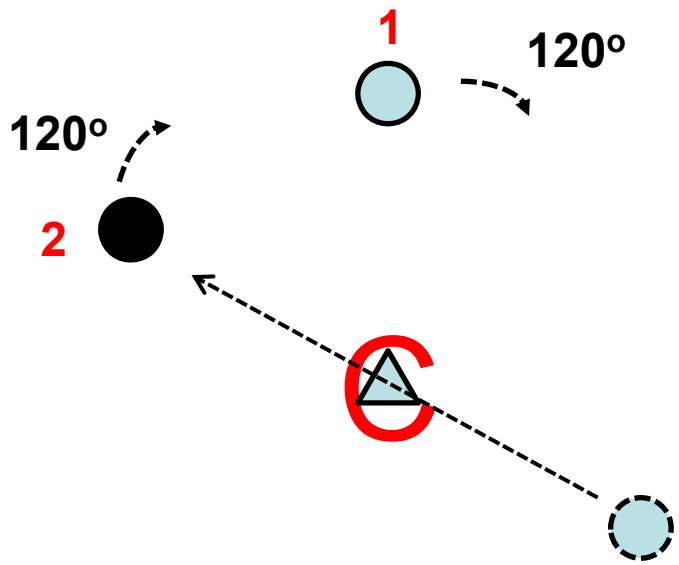
Взаимодействие элементов симметрии

3. Теорема об инверсионных осях

$L_{i3} + // m = 3// m + 3^{\perp}L_2$

$L_{i6} + // m = 3// m + 3^{\perp}L_2$

$L_{i4} + // m = 2// m + 2^{\perp}L_2$



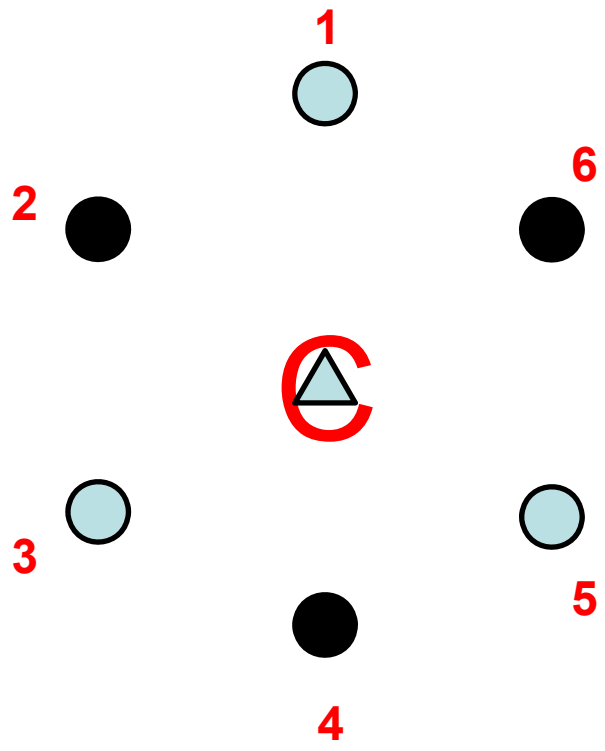
Взаимодействие элементов симметрии

3. Теорема об инверсионных осях

$L_{i3} + // m = 3// m + 3^{\perp}L_2$

$L_{i6} + // m = 3// m + 3^{\perp}L_2$

$L_{i4} + // m = 2// m + 2^{\perp}L_2$



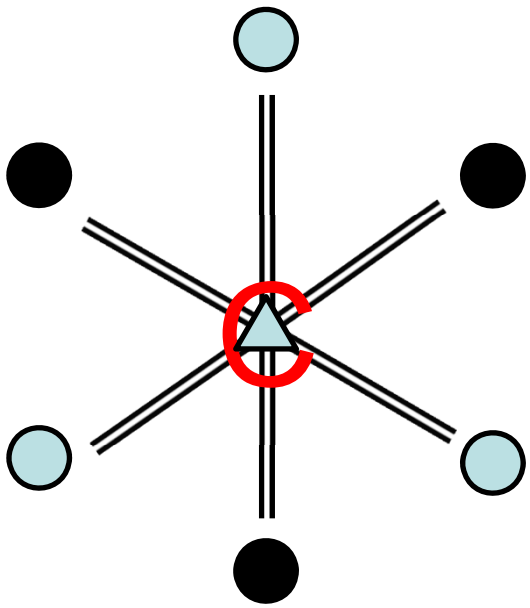
Взаимодействие элементов симметрии

3. Теорема об инверсионных осях

$L_{i3} + // m = 3// m + 3^{\perp}L_2$

$L_{i6} + // m = 3// m + 3^{\perp}L_2$

$L_{i4} + // m = 2// m + 2^{\perp}L_2$



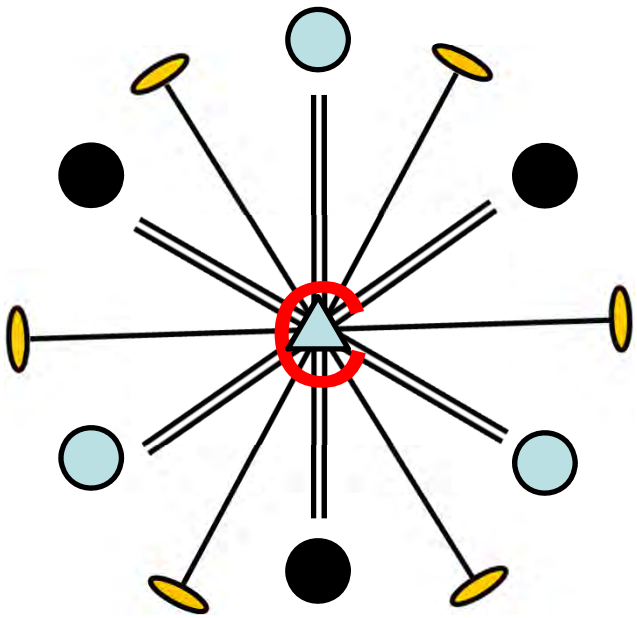
Взаимодействие элементов симметрии

3. Теорема об инверсионных осях

$L_{i3} + // m = 3// m + 3^{\perp}L_2$

$L_{i6} + // m = 3// m + 3^{\perp}L_2$

$L_{i4} + // m = 2// m + 2^{\perp}L_2$



$L_{i3}\ 3L_2\ 3m$

Взаимодействие элементов симметрии

4. Теорема о центре инверсии (о четных осях симметрии)

При наличии оси симметрии четного порядка и центра инверсии, в кристалле будут плоскости зеркального отражения, перпендикулярные оси, причем число плоскостей будет равно числу осей четного порядка.

Следствие:

$m + C = \perp L_{2n}$

$L_{2n} + C = L_{2n} mC$

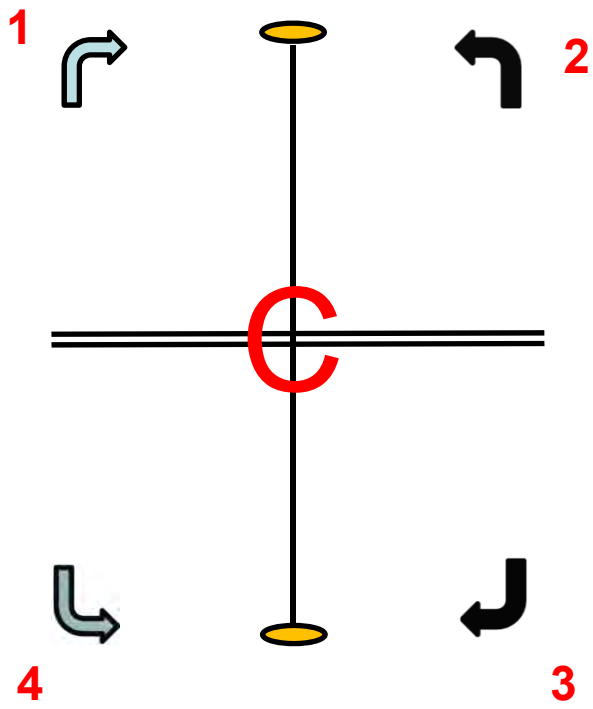
Взаимодействие элементов симметрии

4. Теорема о центре инверсии (о четных осях симметрии)

Следствие:

$m + C = \perp L_{2n}$

$L_{2n} + C = L_{2n} mC$



Виды симметрии

Количество возможных наборов элементов симметрии ограничено – их 32 – виды симметрии или точечные группы симметрии (т.к. любые преобразования оставляют хотя бы одну точку фигуры неподвижной – не преобразующейся в другие точки).

Зная теоремы сложения элементов симметрии, можно вывести все возможные комбинации.

В начале задается простейший набор элементов симметрии, не выводимых друг из друга с помощью теорем.

Виды симметрии

Возможны семь таких наборов:

Примитивный – одна поворотная ось n порядка;

Инверсионно-примитивный – одна инверсионная ось n порядка;

Центральный – поворотная ось симметрии n порядка и центр инверсии;

Планальный – поворотная ось симметрии n порядка и параллельная ей плоскость зеркального отражения;

Инверсионно-планальный – инверсионная ось симметрии n порядка и параллельная ей плоскость зеркального отражения;

Аксиальный – поворотная ось симметрии n порядка и перпендикулярная ей поворотная ось симметрии 2 порядка;

Аксиально-центральный – аксиальный набор элементов симметрии и центр инверсии.

Виды симметрии

	Примитивный	Инверсионно-примитивный	Центральный	Планальный	Инверсионно-планальный	Аксиальный	Аксиально-центральный
L_1							
L_2							
L_3							
L_4							
L_6							

Виды симметрии

	Примитивный	Инверсионно-примитивный	Центральный	Планальный	Инверсионно-планальный	Аксиальный	Аксиально-центральный
L_1	L_1						
L_2	L_2						
L_3	L_3						
L_4	L_4						
L_6	L_6						

<u>Примитивный</u> – одна поворотная ось n порядка

Виды симметрии

	Примитивный	Инверсионно-примитивный	Центральный	Планальный	Инверсионно-планальный	Аксиальный	Аксиально-центральный
L_1	L_1	$L_{i1} \equiv C$					
L_2	L_2	$L_{i2} \equiv m$					
L_3	L_3	$L_{i3} \equiv L_3C$					
L_4	L_4	L_{i4}					
L_6	L_6	$L_{i6} \equiv L_3/m$					

<u>Инверсионно-примитивный</u> – одна инверсионная ось n порядка

Виды симметрии

	Примитивный	Инверсионно-примитивный	Центральный	Планальный	Инверсионно-планальный	Аксиальный	Аксиально-центральный
L_1	L_1	$L_{i1} \equiv C$	$L_1+C \equiv C$				
L_2	L_2	$L_{i2} \equiv m$	$L_2\ C\ m$				
L_3	L_3	$L_{i3} \equiv L_3C$	$L_3+C \equiv L_{i3}$				
L_4	L_4	L_{i4}	$L_4\ C\ m$				
L_6	L_6	$L_{i6} \equiv L_3/m$	$L_6\ C\ m$				

<u>Центральный</u> – поворотная ось симметрии n порядка и центр инверсии

Виды симметрии

	Примитивный	Инверсионно-примитивный	Центральный	Планальный	Инверсионно-планальный	Аксиальный	Аксиально-центральный
L_1	L_1	$L_{i1} \equiv C$	$L_1+C \equiv C$	$L_1+m \equiv m$			
L_2	L_2	$L_{i2} \equiv m$	L_2 C m	$L_2$2m			
L_3	L_3	$L_{i3} \equiv L_3C$	$L_3+C \equiv L_{i3}$	$L_3$3m			
L_4	L_4	L_{i4}	L_4 C m	$L_4$4m			
L_6	L_6	$L_{i6} \equiv L_3/m$	L_6 C m	$L_6$6m			

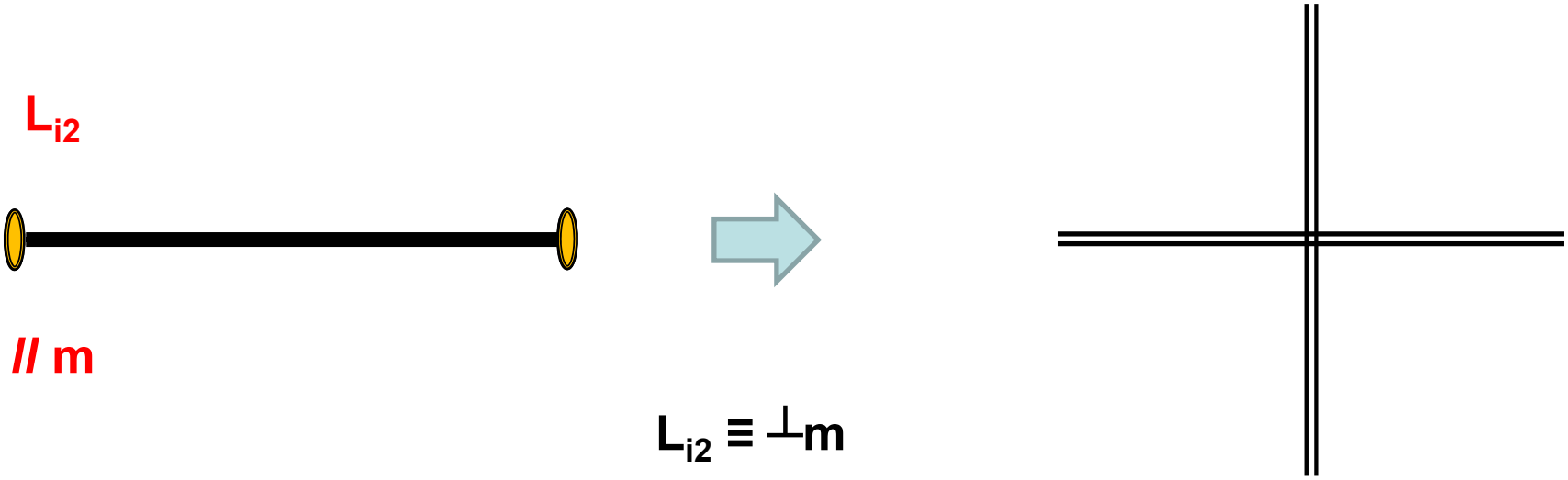
<u>Планальный</u> – поворотная ось симметрии n порядка и параллельная ей плоскость зеркального отражения

Виды симметрии

	Примитивный	Инверсионно-примитивный	Центральный	Планальный	Инверсионно-планальный	Аксиальный	Аксиально-центральный
L_1	L_1	$L_{i1} \equiv C$	$L_1+C \equiv C$	$L_1+m \equiv m$	$C\ m\ L_2$		
L_2	L_2	$L_{i2} \equiv m$	$L_2\ C\ m$	$L_2 2m$			
L_3	L_3	$L_{i3} \equiv L_3C$	$L_3+C \equiv L_{i3}$	$L_3 3m$	$L_3 3L_2 3mC$		
L_4	L_4	L_{i4}	$L_4\ C\ m$	$L_4 4m$	$L_{i4} 2L_2 2m$		
L_6	L_6	$L_{i6} \equiv L_3/m$	$L_6\ C\ m$	$L_6 6m$	$L_{i6} 3L_2 3m$		

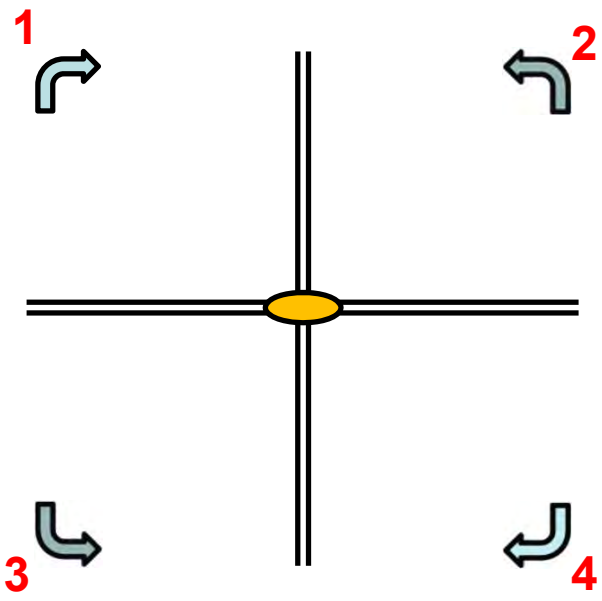
<u>Инверсионно-планальный</u> – инверсионная ось симметрии n порядка и параллельная ей плоскость зеркального отражения

Виды симметрии



<u>Инверсионно-планальный</u> – инверсионная ось симметрии n порядка и параллельная ей плоскость зеркального отражения

Виды симметрии



$L_2 2m$

<u>Инверсионно-планальный</u> – инверсионная ось симметрии n порядка и параллельная ей плоскость зеркального отражения

Виды симметрии

	Примитивный	Инверсионно-примитивный	Центральный	Планальный	Инверсионно-планальный	Аксиальный	Аксиально-центральный
L_1	L_1	$L_{i1} \equiv C$	$L_1+C \equiv C$	$L_1+m \equiv m$	$C\ m\ L_2$		
L_2	L_2	$L_{i2} \equiv m$	$L_2\ C\ m$	$L_2 2m$	$L_2 2m$		
L_3	L_3	$L_{i3} \equiv L_3C$	$L_3+C \equiv L_{i3}$	$L_3 3m$	$L_3 3L_2 3mC$		
L_4	L_4	L_{i4}	$L_4\ C\ m$	$L_4 4m$	$L_{i4} 2L_2 2m$		
L_6	L_6	$L_{i6} \equiv L_3/m$	$L_6\ C\ m$	$L_6 6m$	$L_{i6} 3L_2 3m$		

<u>Инверсионно-планальный</u> – инверсионная ось симметрии n порядка и параллельная ей плоскость зеркального отражения

Виды симметрии

	Примитивный	Инверсионно-примитивный	Центральный	Планальный	Инверсионно-планальный	Аксиальный	Аксиально-центральный
L_1	L_1	$L_{i1} \equiv C$	$L_1+C \equiv C$	$L_1+m \equiv m$	$C\ m\ L_2$	L_2	
L_2	L_2	$L_{i2} \equiv m$	$L_2\ C\ m$	$L_2 2m$	$L_2 2m$	$L_2 2L_2 \equiv 3L_2$	
L_3	L_3	$L_{i3} \equiv L_3 C$	$L_3+C \equiv L_{i3}$	$L_3 3m$	$L_3 3L_2 3mC$	$L_3 3L_2$	
L_4	L_4	L_{i4}	$L_4\ C\ m$	$L_4 4m$	$L_{i4} 2L_2 2m$	$L_4 4L_2$	
L_6	L_6	$L_{i6} \equiv L_3/m$	$L_6\ C\ m$	$L_6 6m$	$L_{i6} 3L_2 3m$	$L_6 6L_2$	

<u>Аксиальный</u> – поворотная ось симметрии n порядка и перпендикулярная ей поворотная ось симметрии 2 порядка

Виды симметрии

	Примитивный	Инверсионно-примитивный	Центральный	Планальный	Инверсионно-планальный	Аксиальный	Аксиально-центральный
L_1	L_1	$L_{i1} \equiv C$	$L_1+C \equiv C$	$L_1+m \equiv m$	$C\ m\ L_2$	L_2	$L_2\ C\ m$
L_2	L_2	$L_{i2} \equiv m$	$L_2\ C\ m$	$L_2 2m$	$L_2 2m$	$L_2 2L_2 \equiv 3L_2$	$3L_2 3mC$
L_3	L_3	$L_{i3} \equiv L_3 C$	$L_3+C \equiv L_{i3}$	$L_3 3m$	$L_3 3L_2 3mC$	$L_3 3L_2$	$L_3 3L_2 C3m$
L_4	L_4	L_{i4}	$L_4\ C\ m$	$L_4 4m$	$L_{i4} 2L_2 2m$	$L_4 4L_2$	$L_4 4L_2 C5m$
L_6	L_6	$L_{i6} \equiv L_3/m$	$L_6\ C\ m$	$L_6 6m$	$L_{i6} 3L_2 3m$	$L_6 6L_2$	$L_6 6L_2 C7m$

<u>Аксиально-центральный</u> – аксиальный набор элементов симметрии и центр инверсии

Виды симметрии

	Примитивный	Инверсионно-примитивный	Центральный	Планальный	Инверсионно-планальный	Аксиальный	Аксиально-центральный
L_1	L_1	$L_{i1} \equiv C$	$L_1+C \equiv C$	$L_1+m \equiv m$	$C\ m\ L_2$	L_2	$L_2\ C\ m$
L_2	L_2	$L_{i2} \equiv m$	$L_2\ C\ m$	$L_2 2m$	$L_2 2m$	$L_2 2L_2 \equiv 3L_2$	$3L_2 3mC$
L_3	L_3	$L_{i3} \equiv L_3 C$	$L_3+C \equiv L_{i3}$	$L_3 3m$	$L_3 3L_2 3mC$	$L_3 3L_2$	$L_3 3L_2 C3m$
L_4	L_4	L_{i4}	$L_4\ C\ m$	$L_4 4m$	$L_{i4} 2L_2 2m$	$L_4 4L_2$	$L_4 4L_2 C5m$
L_6	L_6	$L_{i6} \equiv L_3/m$	$L_6\ C\ m$	$L_6 6m$	$L_{i6} 3L_2 3m$	$L_6 6L_2$	$L_6 6L_2 C7m$

Получается 27 видов симметрии, но здесь не учтены высокосимметричные кристаллы, которые содержат несколько осей высших порядков.

Виды симметрии

	Примитивный	Инверсионно-примитивный	Центральный	Планальный	Инверсионно-планальный	Аксиальный	Аксиально-центральный
L_1	L_1	$L_{i1} \equiv C$	$L_1+C \equiv C$	$L_1+m \equiv m$	$C\ m\ L_2$	L_2	$L_2\ C\ m$
L_2	L_2	$L_{i2} \equiv m$	$L_2\ C\ m$	$L_2 2m$	$L_2 2m$	$L_2 2L_2 \equiv 3L_2$	$3L_2 3mC$
L_3	L_3	$L_{i3} \equiv L_3 C$	$L_3+C \equiv L_{i3}$	$L_3 3m$	$L_3 3L_2 3mC$	$L_3 3L_2$	$L_3 3L_2 C3m$
L_4	L_4	L_{i4}	$L_4\ C\ m$	$L_4 4m$	$L_{i4} 2L_2 2m$	$L_4 4L_2$	$L_4 4L_2 C5m$
L_6	L_6	$L_{i6} \equiv L_3/m$	$L_6\ C\ m$	$L_6 6m$	$L_{i6} 3L_2 3m$	$L_6 6L_2$	$L_6 6L_2 C7m$
	$3L_2 4L_3$						

Получается 27 видов симметрии, но здесь не учтены высокосимметричные кристаллы, которые содержат несколько осей высших порядков.

Минимальный набор – $3L_2 4L_3$ – запишем его в «примитивный»

Виды симметрии

	Примитивный	Инверсионно-примитивный	Центральный	Планальный	Инверсионно-планальный	Аксиальный	Аксиально-центральный
L_1	L_1	$L_{i1} \equiv C$	$L_1+C \equiv C$	$L_1+m \equiv m$	$C\ m\ L_2$	L_2	$L_2\ C\ m$
L_2	L_2	$L_{i2} \equiv m$	$L_2\ C\ m$	$L_2 2m$	$L_2 2m$	$L_2 2L_2 \equiv 3L_2$	$3L_2 3mC$
L_3	L_3	$L_{i3} \equiv L_3 C$	$L_3+C \equiv L_{i3}$	$L_3 3m$	$L_3 3L_2 3mC$	$L_3 3L_2$	$L_3 3L_2 C3m$
L_4	L_4	L_{i4}	$L_4\ C\ m$	$L_4 4m$	$L_{i4} 2L_2 2m$	$L_4 4L_2$	$L_4 4L_2 C5m$
L_6	L_6	$L_{i6} \equiv L_3/m$	$L_6\ C\ m$	$L_6 6m$	$L_{i6} 3L_2 3m$	$L_6 6L_2$	$L_6 6L_2 C7m$
	$3L_2 4L_3$	$3L_2 4L_3$ $C3m$	$3L_2 4L_3$ $C3m$				

Добавим к нему центр инверсии и получим «центральный» (или инверсионно-примитивный, т.к. $L_3+C \equiv L_{i3}$)

Виды симметрии

	Примитивный	Инверсионно-примитивный	Центральный	Планальный	Инверсионно-планальный	Аксиальный	Аксиально-центральный
L_1	L_1	$L_{i1} \equiv C$	$L_1+C \equiv C$	$L_1+m \equiv m$	$C\ m\ L_2$	L_2	$L_2\ C\ m$
L_2	L_2	$L_{i2} \equiv m$	$L_2\ C\ m$	$L_2 2m$	$L_2 2m$	$L_2 2L_2 \equiv 3L_2$	$3L_2 3mC$
L_3	L_3	$L_{i3} \equiv L_3 C$	$L_3+C \equiv L_{i3}$	$L_3 3m$	$L_3 3L_2 3mC$	$L_3 3L_2$	$L_3 3L_2 C3m$
L_4	L_4	L_{i4}	$L_4\ C\ m$	$L_4 4m$	$L_{i4} 2L_2 2m$	$L_4 4L_2$	$L_4 4L_2 C5m$
L_6	L_6	$L_{i6} \equiv L_3/m$	$L_6\ C\ m$	$L_6 6m$	$L_{i6} 3L_2 3m$	$L_6 6L_2$	$L_6 6L_2 C7m$
	$3L_2 4L_3$	$3L_2 4L_3$ $C3m$	$3L_2 4L_3$ $C3m$	$3L_{i4} 4L_3$ $6m$	$3L_{i4} 4L_3$ $6m$		

Проводя через $4L_3$ плоскости симметрии, получим «планальный» вид, но при этом $3L_2$ превращаются в $3L_{i4}$ по теореме 3.

Виды симметрии

	Примитивный	Инверсионно-примитивный	Центральный	Планальный	Инверсионно-планальный	Аксиальный	Аксиально-центральный
L_1	L_1	$L_{i1} \equiv C$	$L_1+C \equiv C$	$L_1+m \equiv m$	$C\ m\ L_2$	L_2	$L_2\ C\ m$
L_2	L_2	$L_{i2} \equiv m$	$L_2\ C\ m$	$L_2 2m$	$L_2 2m$	$L_2 2L_2 \equiv 3L_2$	$3L_2 3mC$
L_3	L_3	$L_{i3} \equiv L_3 C$	$L_3+C \equiv L_{i3}$	$L_3 3m$	$L_3 3L_2 3mC$	$L_3 3L_2$	$L_3 3L_2 C3m$
L_4	L_4	L_{i4}	$L_4\ C\ m$	$L_4 4m$	$L_{i4} 2L_2 2m$	$L_4 4L_2$	$L_4 4L_2 C5m$
L_6	L_6	$L_{i6} \equiv L_3/m$	$L_6\ C\ m$	$L_6 6m$	$L_{i6} 3L_2 3m$	$L_6 6L_2$	$L_6 6L_2 C7m$
	$3L_2 4L_3$	$3L_2 4L_3$ $C3m$	$3L_2 4L_3$ $C3m$	$3L_{i4} 4L_3$ $6m$	$3L_{i4} 4L_3$ $6m$	$3L_4 4L_3$ $6L_2$	

Добавление к «примитивному» набору дополнительных осей по диагоналям между каждой парой исходных осей L_2 дает «аксиальный» вид симметрии, при этом исходные $3L_2$ превращаются в $3L_4$ в соответствии с теоремой 1

Виды симметрии

	Примитивный	Инверсионно-примитивный	Центральный	Планальный	Инверсионно-планальный	Аксиальный	Аксиально-центральный
L_1	L_1	$L_{i1} \equiv C$	$L_1+C \equiv C$	$L_1+m \equiv m$	$C\ m\ L_2$	L_2	$L_2\ C\ m$
L_2	L_2	$L_{i2} \equiv m$	$L_2\ C\ m$	$L_2 2m$	$L_2 2m$	$L_2 2L_2 \equiv 3L_2$	$3L_2 3mC$
L_3	L_3	$L_{i3} \equiv L_3 C$	$L_3+C \equiv L_{i3}$	$L_3 3m$	$L_3 3L_2 3mC$	$L_3 3L_2$	$L_3 3L_2 C3m$
L_4	L_4	L_{i4}	$L_4\ C\ m$	$L_4 4m$	$L_{i4} 2L_2 2m$	$L_4 4L_2$	$L_4 4L_2 C5m$
L_6	L_6	$L_{i6} \equiv L_3/m$	$L_6\ C\ m$	$L_6 6m$	$L_{i6} 3L_2 3m$	$L_6 6L_2$	$L_6 6L_2 C7m$
	$3L_2 4L_3$	$3L_2 4L_3$ $C3m$	$3L_2 4L_3$ $C3m$	$3L_{i4} 4L_3$ $6m$	$3L_{i4} 4L_3$ $6m$	$3L_4 4L_3$ $6L_2$	$3L_4 4L_3$ $6L_2 C9m$

Добавление центра инверсии к «аксиальному» виду дает максимальный набор элементов симметрии

Виды симметрии

	Примитивный	Инверсионно-примитивный	Центральный	Планальный	Инверсионно-планальный	Аксиальный	Аксиально-центральный
L_1	L_1	$L_{i1} \equiv C$					
L_2	L_2	$L_{i2} \equiv m$	$L_2\ C\ m$	$L_2 2m$		$L_2 2L_2 \equiv 3L_2$	$3L_2 3mC$
L_3	L_3	$L_{i3} \equiv L_3 C$		$L_3 3m$	$L_3 3L_2 3mC$	$L_3 3L_2$	
L_4	L_4	L_{i4}	$L_4\ C\ m$	$L_4 4m$	$L_{i4} 2L_2 2m$	$L_4 4L_2$	$L_4 4L_2 C5m$
L_6	L_6	$L_{i6} \equiv L_3/m$	$L_6\ C\ m$	$L_6 6m$	$L_{i6} 3L_2 3m$	$L_6 6L_2$	$L_6 6L_2 C7m$
	$3L_2 4L_3$		$3L_2 4L_3$ $C3m$		$3L_{i4} 4L_3$ $6m$	$3L_4 4L_3$ $6L_2$	$3L_4 4L_3$ $6L_2 C9m$

ИТОГО: 32 вида симметрии или 32 точечные группы, которые существенно отличаются по степени симметричности.

Категории

	Примитивный	Инверсионно-примитивный	Центральный	Планальный	Инверсионно-планальный	Аксиальный	Аксиально-центральный
L_1	L_1	$L_{i1} \equiv C$					
L_2	L_2	$L_{i2} \equiv m$	$L_2\ C\ m$	$L_2 2m$		$L_2 2L_2 \equiv 3L_2$	$3L_2 3mC$
L_3	L_3	$L_{i3} \equiv L_3 C$		$L_3 3m$	$L_3 3L_2 3mC$	$L_3 3L_2$	
L_4	L_4	L_{i4}	$L_4\ C\ m$	$L_4 4m$	$L_{i4} 2L_2 2m$	$L_4 4L_2$	$L_4 4L_2 C5m$
L_6	L_6	$L_{i6} \equiv L_3/m$	$L_6\ C\ m$	$L_6 6m$	$L_{i6} 3L_2 3m$	$L_6 6L_2$	$L_6 6L_2 C7m$
	$3L_2 4L_3$		$3L_2 4L_3$ $C3m$		$3L_{i4} 4L_3$ $6m$	$3L_4 4L_3$ $6L_2$	$3L_4 4L_3$ $6L_2 C9m$

Для начала выделяют категории: низшая, средняя, высшая.

Категории

	Примитивный	Инверсионно-примитивный	Центральный	Планальный	Инверсионно-планальный	Аксиальный	Аксиально-центральный
L_1	L_1	$L_{i1} \equiv C$					
L_2	L_2	$L_{i2} \equiv m$	$L_2\ C\ m$	$L_2 2m$		$L_2 2L_2 \equiv 3L_2$	$3L_2 3mC$
L_3	L_3	$L_{i3} \equiv L_3 C$		$L_3 3m$	$L_3 3L_2 3mC$	$L_3 3L_2$	
L_4	L_4	L_{i4}	$L_4\ C\ m$	$L_4 4m$	$L_{i4} 2L_2 2m$	$L_4 4L_2$	$L_4 4L_2 C5m$
L_6	L_6	$L_{i6} \equiv L_3/m$	$L_6\ C\ m$	$L_6 6m$	$L_{i6} 3L_2 3m$	$L_6 6L_2$	$L_6 6L_2 C7m$
	$3L_2 4L_3$		$3L_2 4L_3$ $C3m$		$3L_{i4} 4L_3$ $6m$	$3L_4 4L_3$ $6L_2$	$3L_4 4L_3$ $6L_2 C9m$

Низшая категория – не содержит осей высшего порядка (т.е. выше L_2)

St.Petersburg State University

Категории

	Примитивный	Инверсионно-примитивный	Центральный	Планальный	Инверсионно-планальный	Аксиальный	Аксиально-центральный
L_1	L_1	$L_{i1} \equiv C$					
L_2	L_2	$L_{i2} \equiv m$	$L_2\ C\ m$	$L_2 2m$		$L_2 2L_2 \equiv 3L_2$	$3L_2 3mC$
L_3	L_3	$L_{i3} \equiv L_3 C$		$L_3 3m$	$L_3 3L_2 3mC$	$L_3 3L_2$	
L_4	L_4	L_{i4}	$L_4\ C\ m$	$L_4 4m$	$L_{i4} 2L_2 2m$	$L_4 4L_2$	$L_4 4L_2 C5m$
L_6	L_6	$L_{i6} \equiv L_3/m$	$L_6\ C\ m$	$L_6 6m$	$L_{i6} 3L_2 3m$	$L_6 6L_2$	$L_6 6L_2 C7m$
	$3L_2 4L_3$		$3L_2 4L_3$ $C3m$		$3L_{i4} 4L_3$ $6m$	$3L_4 4L_3$ $6L_2$	$3L_4 4L_3$ $6L_2 C9m$

Средняя категория – содержит одну ось высшего порядка (L_3 L_4 или L_6)

St.Petersburg State University

Категории

	Примитивный	Инверсионно-примитивный	Центральный	Планальный	Инверсионно-планальный	Аксиальный	Аксиально-центральный
L_1	L_1	$L_{i1} \equiv C$					
L_2	L_2	$L_{i2} \equiv m$	$L_2\ C\ m$	$L_2 2m$		$L_2 2L_2 \equiv 3L_2$	$3L_2 3mC$
L_3	L_3	$L_{i3} \equiv L_3 C$		$L_3 3m$	$L_3 3L_2 3mC$	$L_3 3L_2$	
L_4	L_4	L_{i4}	$L_4\ C\ m$	$L_4 4m$	$L_{i4} 2L_2 2m$	$L_4 4L_2$	$L_4 4L_2 C5m$
L_6	L_6	$L_{i6} \equiv L_3/m$	$L_6\ C\ m$	$L_6 6m$	$L_{i6} 3L_2 3m$	$L_6 6L_2$	$L_6 6L_2 C7m$
	$3L_2 4L_3$		$3L_2 4L_3$ $C3m$		$3L_{i4} 4L_3$ $6m$	$3L_4 4L_3$ $6L_2$	$3L_4 4L_3$ $6L_2 C9m$

Высшая категория – содержит несколько осей высшего порядка

St.Petersburg State University

Сингонии

	Примитивный	Инверсионно-примитивный	Центральный	Планальный	Инверсионно-планальный	Аксиальный	Аксиально-центральный
L_1	L_1	$L_{i1} \equiv C$					
L_2	L_2	$L_{i2} \equiv m$	$L_2\ C\ m$	$L_2 2m$		$L_2 2L_2 \equiv 3L_2$	$3L_2 3mC$
L_3	L_3	$L_{i3} \equiv L_3 C$		$L_3 3m$	$L_3 3L_2 3mC$	$L_3 3L_2$	
L_4	L_4	L_{i4}	$L_4\ C\ m$	$L_4 4m$	$L_{i4} 2L_2 2m$	$L_4 4L_2$	$L_4 4L_2 C5m$
L_6	L_6	$L_{i6} \equiv L_3/m$	$L_6\ C\ m$	$L_6 6m$	$L_{i6} 3L_2 3m$	$L_6 6L_2$	$L_6 6L_2 C7m$
	$3L_2 4L_3$		$3L_2 4L_3$ $C3m$		$3L_{i4} 4L_3$ $6m$	$3L_4 4L_3$ $6L_2$	$3L_4 4L_3$ $6L_2 C9m$

Дальнейшая градация осуществляется по сингониям (от греч. σύν - «согласно, вместе», и γωνία - «угол»)

Сингонии

	Примитивный	Инверсионно-примитивный	Центральный	Планальный	Инверсионно-планальный	Аксиальный	Аксиально-центральный
L_1	L_1	$L_{i1} \equiv C$					
L_2	L_2	$L_{i2} \equiv m$	$L_2\ C\ m$	$L_2 2m$		$L_2 2L_2 \equiv 3L_2$	$3L_2 3mC$
L_3	L_3	$L_{i3} \equiv L_3 C$		$L_3 3m$	$L_3 3L_2 3mC$	$L_3 3L_2$	
L_4	L_4	L_{i4}	$L_4\ C\ m$	$L_4 4m$	$L_{i4} 2L_2 2m$	$L_4 4L_2$	$L_4 4L_2 C5m$
L_6	L_6	$L_{i6} \equiv L_3/m$	$L_6\ C\ m$	$L_6 6m$	$L_{i6} 3L_2 3m$	$L_6 6L_2$	$L_6 6L_2 C7m$
	$3L_2 4L_3$		$3L_2 4L_3$ $C3m$		$3L_{i4} 4L_3$ $6m$	$3L_4 4L_3$ $6L_2$	$3L_4 4L_3$ $6L_2 C9m$

Триклинная сингония – содержит только оси первого порядка

Сингонии

	Примитивный	Инверсионно-примитивный	Центральный	Планальный	Инверсионно-планальный	Аксиальный	Аксиально-центральный
L_1	L_1	$L_{i1} \equiv C$					
L_2	L_2	$L_{i2} \equiv m$	$L_2\ C\ m$	$L_2 2m$		$L_2 2L_2 \equiv 3L_2$	$3L_2 3mC$
L_3	L_3	$L_{i3} \equiv L_3 C$		$L_3 3m$	$L_3 3L_2 3mC$	$L_3 3L_2$	
L_4	L_4	L_{i4}	$L_4\ C\ m$	$L_4 4m$	$L_{i4} 2L_2 2m$	$L_4 4L_2$	$L_4 4L_2 C5m$
L_6	L_6	$L_{i6} \equiv L_3/m$	$L_6\ C\ m$	$L_6 6m$	$L_{i6} 3L_2 3m$	$L_6 6L_2$	$L_6 6L_2 C7m$
	$3L_2 4L_3$		$3L_2 4L_3$ $C3m$		$3L_{i4} 4L_3$ $6m$	$3L_4 4L_3$ $6L_2$	$3L_4 4L_3$ $6L_2 C9m$

Моноклинная сингония – содержит одну ось второго порядка

Сингонии

	Примитивный	Инверсионно-примитивный	Центральный	Планальный	Инверсионно-планальный	Аксиальный	Аксиально-центральный
L_1	L_1	$L_{i1} \equiv C$					
L_2	L_2	$L_{i2} \equiv m$	$L_2\ C\ m$	$L_2 2m$		$L_2 2L_2 \equiv 3L_2$	$3L_2 3mC$
L_3	L_3	$L_{i3} \equiv L_3 C$		$L_3 3m$	$L_3 3L_2 3mC$	$L_3 3L_2$	
L_4	L_4	L_{i4}	$L_4\ C\ m$	$L_4 4m$	$L_{i4} 2L_2 2m$	$L_4 4L_2$	$L_4 4L_2 C5m$
L_6	L_6	$L_{i6} \equiv L_3/m$	$L_6\ C\ m$	$L_6 6m$	$L_{i6} 3L_2 3m$	$L_6 6L_2$	$L_6 6L_2 C7m$
	$3L_2 4L_3$		$3L_2 4L_3$ $C3m$		$3L_{i4} 4L_3$ $6m$	$3L_4 4L_3$ $6L_2$	$3L_4 4L_3$ $6L_2 C9m$

Ромбическая сингония – содержит три оси второго порядка

St.Petersburg State University

Сингонии

	Примитивный	Инверсионно-примитивный	Центральный	Планальный	Инверсионно-планальный	Аксиальный	Аксиально-центральный
L_1	L_1	$L_{i1} \equiv C$					
L_2	L_2	$L_{i2} \equiv m$	$L_2\ C\ m$	$L_2 2m$		$L_2 2L_2 \equiv 3L_2$	$3L_2 3mC$
L_3	L_3	$L_{i3} \equiv L_3 C$		$L_3 3m$	$L_3 3L_2 3mC$	$L_3 3L_2$	
L_4	L_4	L_{i4}	$L_4\ C\ m$	$L_4 4m$	$L_{i4} 2L_2 2m$	$L_4 4L_2$	$L_4 4L_2 C5m$
L_6	L_6	$L_{i6} \equiv L_3/m$	$L_6\ C\ m$	$L_6 6m$	$L_{i6} 3L_2 3m$	$L_6 6L_2$	$L_6 6L_2 C7m$
	$3L_2 4L_3$		$3L_2 4L_3$ $C3m$		$3L_{i4} 4L_3$ $6m$	$3L_4 4L_3$ $6L_2$	$3L_4 4L_3$ $6L_2 C9m$

Тригональная сингония – содержит одну ось третьего порядка

Сингонии

	Примитивный	Инверсионно-примитивный	Центральный	Планальный	Инверсионно-планальный	Аксиальный	Аксиально-центральный
L_1	L_1	$L_{i1} \equiv C$					
L_2	L_2	$L_{i2} \equiv m$	$L_2\ C\ m$	$L_2 2m$		$L_2 2L_2 \equiv 3L_2$	$3L_2 3mC$
L_3	L_3	$L_{i3} \equiv L_3 C$		$L_3 3m$	$L_3 3L_2 3mC$	$L_3 3L_2$	
L_4	L_4	L_{i4}	$L_4\ C\ m$	$L_4 4m$	$L_{i4} 2L_2 2m$	$L_4 4L_2$	$L_4 4L_2 C5m$
L_6	L_6	$L_{i6} \equiv L_3/m$	$L_6\ C\ m$	$L_6 6m$	$L_{i6} 3L_2 3m$	$L_6 6L_2$	$L_6 6L_2 C7m$
	$3L_2 4L_3$		$3L_2 4L_3$ $C3m$		$3L_{i4} 4L_3$ $6m$	$3L_4 4L_3$ $6L_2$	$3L_4 4L_3$ $6L_2 C9m$

Тетрагональная сингония – содержит одну ось четвертого порядка

Сингонии

	Примитивный	Инверсионно-примитивный	Центральный	Планальный	Инверсионно-планальный	Аксиальный	Аксиально-центральный
L_1	L_1	$L_{i1} \equiv C$					
L_2	L_2	$L_{i2} \equiv m$	$L_2\ C\ m$	$L_2 2m$		$L_2 2L_2 \equiv 3L_2$	$3L_2 3mC$
L_3	L_3	$L_{i3} \equiv L_3 C$		$L_3 3m$	$L_3 3L_2 3mC$	$L_3 3L_2$	
L_4	L_4	L_{i4}	$L_4\ C\ m$	$L_4 4m$	$L_{i4} 2L_2 2m$	$L_4 4L_2$	$L_4 4L_2 C5m$
L_6	L_6	$L_{i6} \equiv L_3/m$	$L_6\ C\ m$	$L_6 6m$	$L_{i6} 3L_2 3m$	$L_6 6L_2$	$L_6 6L_2 C7m$
	$3L_2 4L_3$		$3L_2 4L_3$ $C3m$		$3L_{i4} 4L_3$ $6m$	$3L_4 4L_3$ $6L_2$	$3L_4 4L_3$ $6L_2 C9m$

Гексагональная сингония – содержит одну ось шестого порядка

Сингонии

	Примитивный	Инверсионно-примитивный	Центральный	Планальный	Инверсионно-планальный	Аксиальный	Аксиально-центральный
L_1	L_1	$L_{i1} \equiv C$					
L_2	L_2	$L_{i2} \equiv m$	$L_2\ C\ m$	$L_2 2m$		$L_2 2L_2 \equiv 3L_2$	$3L_2 3mC$
L_3	L_3	$L_{i3} \equiv L_3 C$		$L_3 3m$	$L_3 3L_2 3mC$	$L_3 3L_2$	
L_4	L_4	L_{i4}	$L_4\ C\ m$	$L_4 4m$	$L_{i4} 2L_2 2m$	$L_4 4L_2$	$L_4 4L_2 C5m$
L_6	L_6	$L_{i6} \equiv L_3/m$	$L_6\ C\ m$	$L_6 6m$	$L_{i6} 3L_2 3m$	$L_6 6L_2$	$L_6 6L_2 C7m$
	$3L_2 4L_3$		$3L_2 4L_3$ $C3m$		$3L_{i4} 4L_3$ $6m$	$3L_4 4L_3$ $6L_2$	$3L_4 4L_3$ $6L_2 C9m$

Кубическая сингония – содержит четыре оси третьего порядка

Виды симметрии

Категория	Сингония	Признак
Низшая	**Триклинная**	Ось 1-го порядка
	Моноклинная	Одна ось 2-го порядка
	Ромбическая	Три ⊥ оси 2-го порядка
Средняя	**Тригональная**	Одна ось 3-го порядка
	Тетрагональная	Одна ось 4-го порядка
	Гексагональная	Одна ось 6-го порядка
Высшая	**Кубическая**	Четыре оси 3-го порядка

Виды симметрии

Категории	Сингонии	Виды симметрии: Примитивные	Инверсионно-Примитивные	Центральные	Инверсионно-Планальные	Планальные	Аксиальные	Аксиально-Центральное
Низшая	Триклинная	C_1 1	C_i $\bar{1}$ C					
	Моноклинная	C_2 2 L_2	C_s m m	C_{2h} 2/m L_2Cm				
	Ромбическая					C_{2v} mm2 L_22m	D_2 222 $3L_2$	D_{2h} mmm $3L_2C3m$
Средняя	Тетрагональная	C_4 4 L_4	S_4 $\bar{4}$ L_{i4}	C_{4h} 4/m L_4Cm	D_{2d} $\bar{4}2m$ $L_{i4}2L_22m$	C_{4v} 4mm L_44m	D_4 422 L_44L_2	D_{4h} 4/mmm L_44L_2C5m
	Тригональная	C_3 3 L_3	C_{3i} $\bar{3}$ L_{i3}		D_{3d} $\bar{3}m$ L_33L_2C3m	C_{3v} 3m L_33m	D_3 322 L_33L_2	
	Гексагональная	C_6 6 L_6	C_{3h} $\bar{6}$ L_{i6}	C_{6h} 6/m L_6Cm	D_{3h} $\bar{6}m2$ $L_{i6}3L_23m$	C_{6v} 6mm L_66m	D_6 622 L_66L_2	D_{6h} 6/mmm L_66L_2C7m
Высшая	Кубическая	T 23 $3L_24L_3$		T_h $m\bar{3}$ $3L_24L_3C3m$	T_d $\bar{4}3m$ $3L_{i4}4L_36m$		O 432 $3L_44L_36L_2$	O_h $m\bar{3}m$ $3L_44L_36L_2C9m$

Единичные направления

Единичным направлением называется уникальное направление в кристалле, которое не может быть размножено элементами симметрии

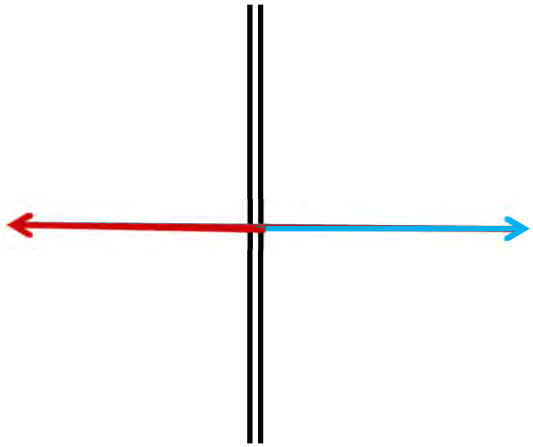
Направления, связанные элементами симметрии, называются симметрично-равные

Полярными называются такие единичные направления, противоположные концы которых не могут быть совмещены элементами симметрии кристалла

Единичные направления

<u>Единичным направлением</u> называется уникальное направление в кристалле, которое не может быть размножено элементами симметрии

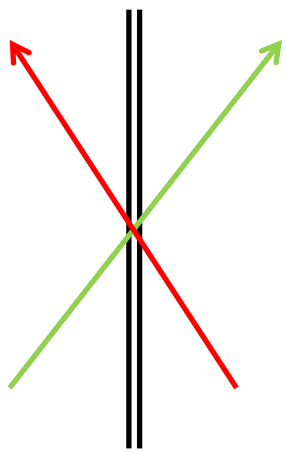
Единичное <u>неполярное</u> направление

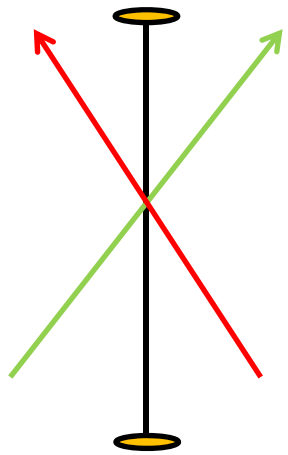


Единичное <u>полярное</u> направление

Единичные направления

Направления, связанные элементами симметрии, называются <u>симметрично-равные</u>

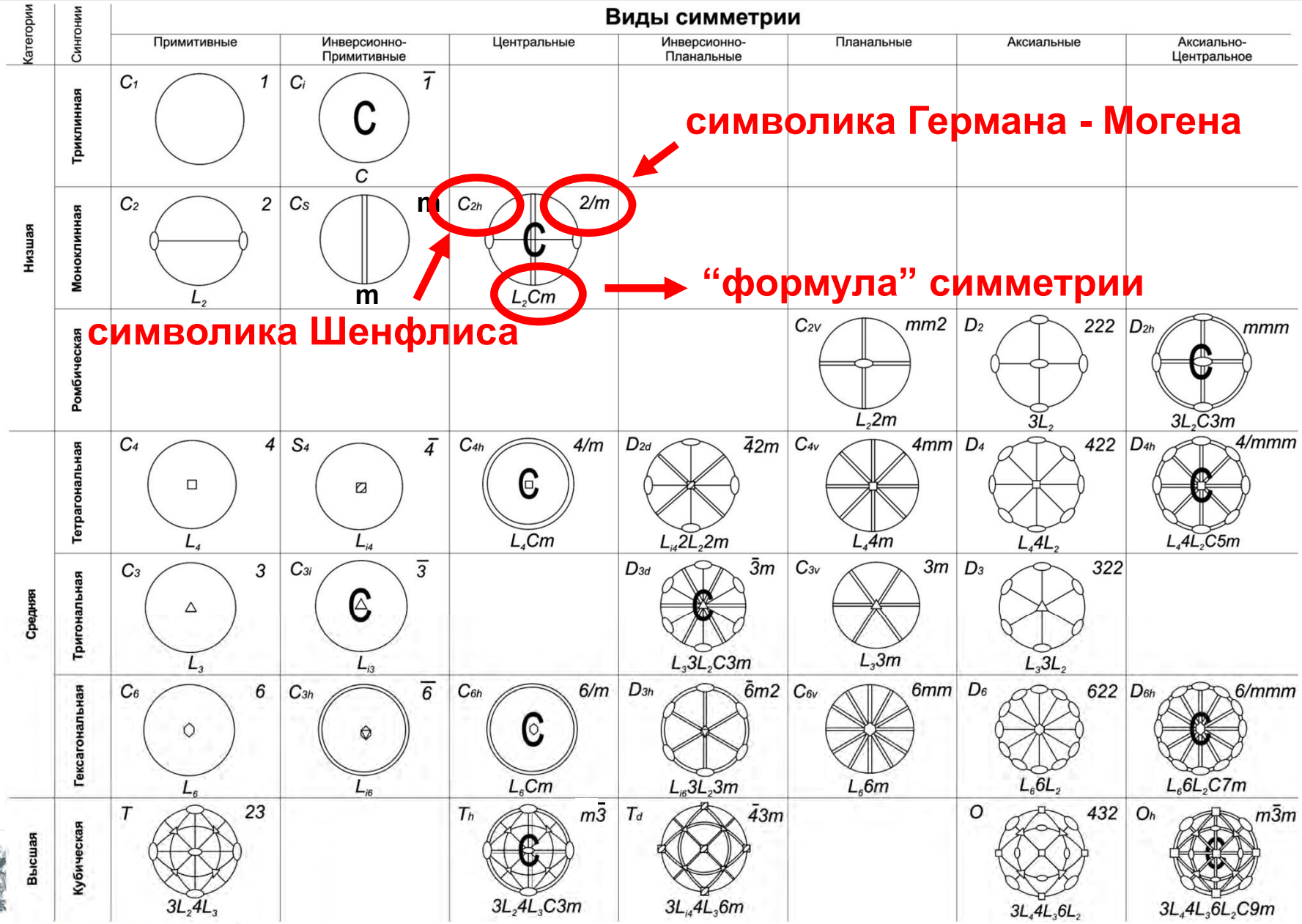




Единичные направления

Категория	Сингония	Ед. направления
Низшая (ед. напр. > 1)	Триклинная	Все (∞)
	Моноклинная	∞, но не все
	Ромбическая	3
Средняя (ед. напр. = 1)	Тригональная	1
	Тетрагональная	1
	Гексагональная	1
Высшая (ед. напр. = 0)	Кубическая	0

Виды симметрии



Формула симметрии

Формула симметрии состоит из записанных подряд всех элементов симметрии данного объекта

Поваренная соль (NaCl) кристаллизуется в форме кубов, алмаз, квасцы — в форме октаэдров, но полный набор элементов симметрии у этих многогранников один и тот же: $3L_4 4L_3 6L_2 9mC$

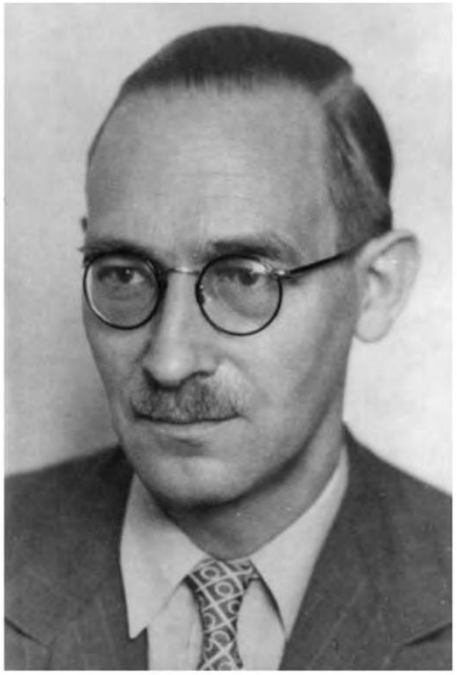
В формуле симметрии на первом месте принято писать оси симметрии от высших к низшим, на втором – плоскости симметрии, затем центр

Исключением являются только виды симметрии кубических кристаллов – $4L_3$ всегда указывают на втором месте

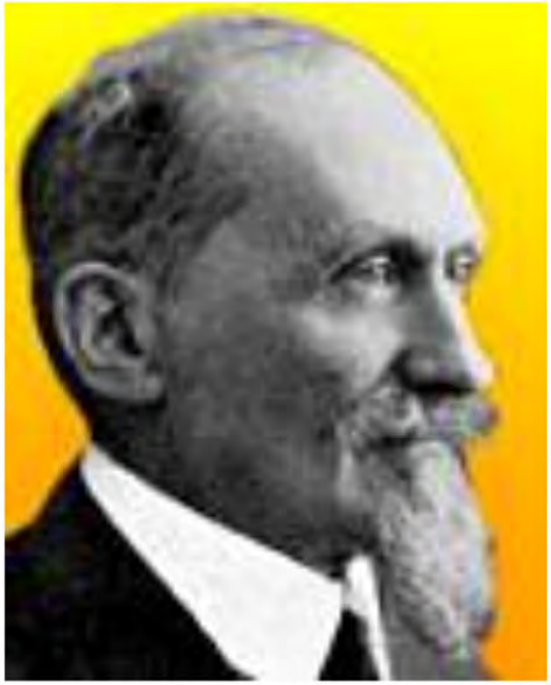
Символы Германа-Могена

Были предложены немецким кристаллографом Карлом Германом в 1928 г. и модифицированы французским минералогом Шарлем-Виктором Могеном в 1931 г. Также называются «международными символами», поскольку используются в Интернациональных Таблицах по Кристаллографии, начиная с их первого издания в 1935 г.

www.iucr.org



Карл Германн
1898-1961



Шарль-Виктор Моген
1878-1958

Символы Германа-Могена

Были предложены немецким кристаллографом Карлом Германом в 1928 г. и модифицированы французским минералогом Шарлем-Виктором Могеном в 1931 г. Также называются «международными символами», поскольку используются в Интернациональных Таблицах по Кристаллографии, начиная с их первого издания в 1935 г.

Обозначаются симметрически неэквивалентные элементы симметрии

Поворотные оси симметрии обозначают арабскими цифрами — 1, 2, 3, 4 и 6.

Инверсионные оси обозначают арабскими цифрами с чёрточкой сверху — $\bar{1}$ $\bar{3}$ $\bar{4}$ $\bar{6}$, при этом ось $\bar{2}$, которая является зеркальной плоскостью симметрии, обозначается символом *m* (от англ. mirror - зеркало)

Символы Германа-Могена

32 вида симметрии

Триклинная	1	-1					
Моноклинная	2	*m*	2/*m*				
Ромбическая	222	*mm2*	*mmm*				
Тетрагональная	4	-4	4/*m*	422	4*mm*	-42*m*	4/*mmm*
Тригональная	3	-3	32	3*m*	-3*m*		
Гексагональная	6	-6	6/*m*	622	6*mm*	-62*m*	6/*mmm*
Кубическая	23	*m*-3	432	-43*m*	*m*-3*m*		

St.Petersburg State University

Центросимметричные группы

Символы Шенфлиса

Немецкий математик, известный по своим работам о применении теории групп в кристаллографии и по работам в области топологии.

В одно время с Е.С. Федоровым вывел 230 пространственных групп симметрии (1891 г.)

Артур Мориц Шенфлис
(1853-1928)

Символы Шенфлиса

C_n — группы с единственным особым направлением, представленным поворотной осью симметрии
C_{ni} — группы с единственной инверсионной осью симметрии.
C_v (от нем. vertical — вертикальный) — для плоскостей, расположенных вдоль единственной или главной оси симметрии, которая всегда выбирается вертикальной.
C_h (от нем. horisontal — горизонтальный) — для плоскости, перпендикулярной к главной оси симметрии.
S (от нем. spiegel — зеркало) — для плоскости неопределенной ориентации, то есть не фиксированной ввиду отсутствия в группе иных элементов симметрии

Символы Шенфлиса

O,T — группы симметрии с несколькими осями высшего порядка — группы кубической сингонии — обозначаются буквой O в случае, если они содержат полный набор осей симметрии, или буквой T — если в группе отсутствуют диагональные оси симметрии.

$\mathbf{D_n}$ — является группой Cn с добавочной осью симметрии второго порядка, перпендикулярной исходной оси.

$\mathbf{D_{nh}}$ также имеет горизонтальную плоскость симметрии.

$\mathbf{D_{nv}}$ также имеет вертикальную плоскость симметрии.

n может равняться 1,2,3,4,6.